

一类形状可调的拟 Bézier 曲线

刘 植^{1),2)} 陈晓彦¹⁾ 谢 进^{2),3)} 时 军¹⁾

¹⁾(合肥工业大学数学学院,合肥 230009) ²⁾(合肥工业大学计算机与信息学院,合肥 230009)

³⁾(合肥学院数理系,合肥 230022)

摘 要 给出一种带多形状参数的多项式调配函数, Bernstein 基函数是它的一个特例。利用给出的调配函数,定义了一类形状可调的拟 Bézier 曲线。调配函数和拟 Bézier 曲线具有与 Bernstein 基函数及 Bézier 曲线类似的性质。对给定的控制多边形,可以通过改变形状参数的值来调整曲线的形状。运用本文方法可生成带参数的拟 Bézier 曲面。实例表明,本文方法控制灵活,方便有效。

关键词 调配函数 形状参数 拟 Bézier 曲线

中图法分类号: TP391.72

文献标识码: A

文章编号: 1006-8961(2009)11-2362-07

A Class of Adjustable Quasi Bézier Curve

LIU Zhi^{1),2)}, CHEN Xiao-yan¹⁾, XIE Jin^{2),3)}, SHI Jun¹⁾

¹⁾(School of Mathematics, Hefei University of Technology, Hefei 230009)

²⁾(College of Computer and Information, Hefei University of Technology, Hefei 230009)

³⁾(Department of Mathematics and Physics, Hefei University, Hefei 230022)

Abstract A class of blending function with shape parameter is presented in this paper. It is an extension to the degree- n Bernstein basis function. Based on this blending function, we define a class of adjustable quasi Bézier curve. The blending functions and quasi Bézier curves have the most properties of Bernstein basis and the Bézier curves. Moreover the shape of the quasi Bézier curves with the same control polygon can be adjusted by changing the shape parameter value. Using this method, quasi Bézier surfaces with parameters are constructed. Experiments show that the method given in this paper is intuitive, effective and easy to control.

Keywords blending function, shape parameter, quasi Bézier curve

1 引 言

曲线曲面的表示方法是计算机辅助几何设计研究的重要内容,也是计算机辅助设计与制造的重要工具。而以 Bernstein 基构造的 Bézier 曲线曲面结构简单,且具有许多优良的性质,在诸多形式的参数多项式曲线中独树一帜,是自由型曲线曲面造型中最常用的工具之一^[1]。

对于一组给定的控制顶点,可以唯一确定一条

Bézier 曲线,若要修改曲线的形状,必须调整控制顶点。为了生成形状可调的曲线曲面,通常利用有理 Bézier 曲线曲面中的权因子来实现,但权因子的选取及对曲线曲面的形状影响尚未完全解决,而且求导、求积运算较为复杂。在实际应用中,出于汽车制造业中汽车顶部,挡板等部件对曲面曲率和挠率的设计要求, Mineur 等人, Farin 等人, Cao 等人讨论了一类带单调曲率和挠率的 Bézier 曲线^[2-4]。为了更加灵活的交互设计, Han 等人提出了一类带形状参

基金项目:国家自然科学基金项目(60773043);教育部博士点新教师基金项目(2008JYXJ0828);安徽省自然科学基金项目(070416273X);安徽省高校优秀青年人才基金项目(2009SQRZ008)

收稿日期:2009-06-04; **改回日期:**2009-07-09

第一作者简介:刘 植(1976 ~),男,讲师。合肥工业大学计算机应用专业博士研究生。主要研究方向为数值逼近, CAGD, E-mail: liuzhi314@126.com

数的广义 Bézier 曲线曲面^[5], 作为 Bézier 曲线曲面的推广, 除具备 Bézier 曲线曲面的优点外, 通过调控形状参数的取值可以生成更加丰富的曲线曲面。为了更有效地对曲线曲面进行调控, 通过引入一个或多个可调的形状参数对 Bernstein 基进行扩展^[6-12], 同时保留 Bernstein 基的大多数优良性质, 如规范性、非负性及端点性质等, 从而使其生成的曲线曲面在不改变控制顶点(或控制网格)的前提下, 仅通过改变形状参数的取值可以灵活调控曲线曲面的形状。

本文的目的是提出一种扩展 Bernstein 基的一般方法, 它含有多个形状参数, 且具有与 Bernstein 基类似的性质。利用该方法生成的拟 Bézier 曲线具有与 Bézier 曲线类似的特征, 对于给定的控制多边形, 改变形状参数的取值可以调整曲线的位置。Bézier 曲线及其他一些现有的扩展曲线均为该方法的特例。

2 调配函数及性质

本节将利用 n 次及 $n+1$ 次 Bernstein 基的凸组合, 构造一组新的 $n+1$ 次多项式调配函数, 使之具有类似 Bernstein 基的性质, 且以 Bernstein 基为特例。记

$$B_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i} \quad 0 \leq t \leq 1; i = 0, 1, \dots, n$$

为 n 次 Bernstein 基函数, 现引入带多个形状参数的调配函数如下:

定义 1 对 $t \in [0, 1], \lambda, \mu_0, \dots, \mu_{[n/2]-1} \in [0, 1]$, 记

$$\begin{cases} b_{i,n}(\lambda, \mu_{i-1}, \mu_i; t) = (1-\lambda)B_{i,n}(t) + \\ \lambda[(1-\mu_{i-1})B_{i,n+1}(t) + \mu_i B_{i+1,n+1}(t)] \quad (1) \\ b_{n-i,n}(\lambda, \mu_{i-1}, \mu_i; t) = b_{i,n}(\lambda, \mu_{i-1}, \mu_i; 1-t) \end{cases}$$

式中, $i = 0, 1, \dots, [n/2], \mu_{-1} = 0$, 且 $\mu_{[n/2]}$ 满足

$$\mu_{[n/2]} = \begin{cases} 1/2 & n \text{ 为奇数} \\ 1 - \mu_{[n/2]-1} & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

称关于 t 的多项式 $b_{i,n}(t) = b_{i,n}(\lambda, \mu_{i-1}, \mu_i; t)$ 为 $n+1$ 次拟 Bernstein 调配函数。

容易看出, 上述定义的 $n+1$ 次拟 Bernstein 调配函数共有 $n+1$ 个多项式, 每个多项式包含 3 个参数 $\lambda, \mu_{i-1}, \mu_i$, 称之为形状参数, 共有 $[n/2] + 1$ 个形状参数 $\lambda, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{[n/2]-1}$ 。为了便于讨论拟 Bernstein 调配函数的性质, 可将式(1)中第一个表达式改写为如下等价形式:

$$b_{i,n}(t) = B_{i,n}(t) \cdot \left[1 - \lambda + \frac{(n+1)\lambda(1-\mu_{i-1})}{n+1-i} \times \left(1 - t + \frac{(n+1)\lambda\mu_i}{i+1} t \right) \right] \quad (2)$$

$$b_{i,n}(t) = \left[C_n^i + C_{n+1}^i \lambda \left(\frac{i}{n+1} - \mu_{i-1} \right) + C_{n+1}^i \lambda \left(\frac{n+1-i}{i+1} \mu_i + \mu_{i-1} - 1 \right) \right] t^i (1-t)^{n-i} \quad (3)$$

带形状参数 $\lambda, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{[n/2]-1}$ 的拟 Bernstein 调配函数 $b_{i,n}(\lambda, \mu_{i-1}, \mu_i; t)$ 具有如下性质:

性质 1 非负性, $b_{i,n}(t) \geq 0, i = 0, 1, \dots, n$ 。由式(1)及 Bernstein 基函数的非负性易证。

性质 2 对称性, $b_{n-i,n}(\lambda, \mu_{i-1}, \mu_i; t) = b_{i,n}(\lambda, \mu_{i-1}, \mu_i; 1-t)$ 。由式(1)及 Bernstein 基函数的对称性易证。

性质 3 规范性, $\sum_{i=0}^n b_{i,n}(t) = 1$ 。事实上, 利用 $B_{n-i,n}(t) = B_{i,n}(1-t)$, 将式(1)代入直接计算, 注意到 $\mu_{[n/2]}$ 的取得

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n b_{i,n}(t) &= \sum_{i=0}^n \{ (1-\lambda)B_{i,n}(t) + \lambda[(1-\mu_{i-1}) \times \\ & B_{i,n+1}(t) + \mu_i B_{i+1,n+1}(t)] \} \\ &= (1-\lambda) \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) + \lambda \sum_{i=0}^{n+1} B_{i,n+1}(t) \\ &= 1 \end{aligned}$$

性质 4 端点性质,

$$\begin{cases} b_{0,n}(0) = 1, b_{i,n}(0) = 0 & i = 1, \dots, n \\ b_{n,n}(1) = 1, b_{i,n}(1) = 0 & i = 0, \dots, n-1 \\ b'_{0,n}(0) = -b'_{1,n}(0) = (n+1)\lambda\mu_0 - \\ \lambda - n, b'_{i,n}(0) = 0 & i = 2, \dots, n \\ b'_{n,n}(1) = -b'_{n-1,n}(1) = n + \lambda - (n+1)\lambda\mu_0 \\ b'_{i,n}(1) = 0 & i = 0, \dots, n-2 \end{cases} \quad (4)$$

根据 $B'_{i,n}(t)$ 在端点的取值特点, 对式(2)求导并代值即得。

性质 5 线性无关性, 事实上, 设线性组合

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i b_{i,n}(t) = 0, t \in [0, 1], \alpha_i \in \mathbf{R}, \text{ 由式(3)易得}$$

$$b_{i,n}^{(j)}(0) = 0, j = 0, 1, \dots, n-1; i = j+1, 2, \dots, n$$

将线性组合对 t 求 $j(j=0, 1, \dots, n)$ 阶导, 并令 $t=0$, 将上式代入即得

$$\begin{cases} \alpha_0 b_{0,n}(0) = 0 \\ \alpha_0 b'_{0,n}(0) + \alpha_1 b'_{1,n}(0) = 0 \\ \dots \\ \alpha_0 b_{0,n}^{(n-1)}(0) + \alpha_1 b_{1,n}^{(n-1)}(0) + \dots + \\ \alpha_{n-1} b_{n-1,n}^{(n-1)}(0) = 0 \\ \alpha_0 b_{0,n}^{(n)}(0) + \alpha_1 b_{1,n}^{(n)}(0) + \dots + \alpha_{n-1} b_{n-1,n}^{(n)}(0) + \\ \alpha_n b_{n,n}^{(n)}(0) = 0 \end{cases}$$

故 $\alpha_j = 0, j = 0, 1, \dots, n$, 即 $\{b_{i,n}(t)\}$ 是线性无关的。

性质 6 对形状参数的单调性, 式(2)分别关于 $\lambda, \mu_{i-1}, \mu_i$ 求偏导得

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_{i,n}}{\partial \lambda} &= B_{i,n}(t) \left[\frac{(n+1)(1-\mu_{i-1})}{n+1-i} (1-t) + \frac{(n+1)\mu_i}{i+1} t - 1 \right] \\ &= B_{i,n}(t) \left[\left(\frac{(n+1)(1-\mu_{i-1})}{n+1-i} - 1 \right) (1-t) + \left(\frac{(n+1)\mu_i}{i+1} - 1 \right) t \right] \end{aligned}$$

根据性质 2 可知, $\mu_{i-1} \leq \frac{i}{n+1}, \mu_i \geq \frac{i+1}{n+1}$ 时, $\frac{\partial b_{i,n}}{\partial \lambda} \geq 0$,

$b_{i,n}(t), b_{n-i,n}(t)$ 关于 λ 单调增加; $\mu_{i-1} \geq \frac{i}{n+1}, \mu_i \leq$

$\frac{i+1}{n+1}$ 时, $\frac{\partial b_{i,n}}{\partial \lambda} \leq 0, b_{i,n}(t), b_{n-i,n}(t)$ 关于 λ 单调减少。

另一方面, 又

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_{i,n}}{\partial \mu_{i-1}} &= -B_{i,n}(t) \frac{(n+1)\lambda}{n+1-i} (1-t) \leq 0 \\ \frac{\partial b_{i,n}}{\partial \mu_i} &= B_{i,n}(t) \frac{(n+1)\lambda}{i+1} t \geq 0 \end{aligned}$$

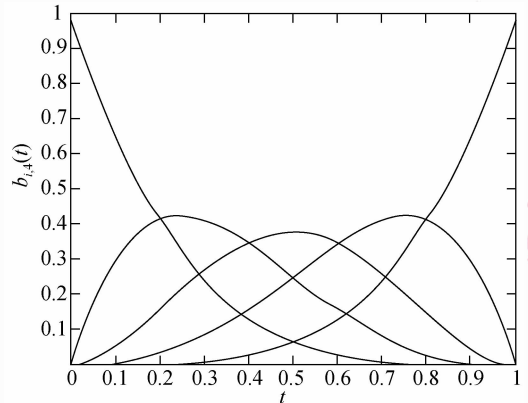
根据性质 2 可知, $b_{i,n}(t), b_{n-i,n}(t)$ 关于 μ_i 单调增加; $b_{i+1,n}(t), b_{n-i-1,n}(t)$ 关于 μ_i 单调减少。显然, 参数 λ 的取值影响到每个调配函数, 而参数 μ_i 只影响到 $b_{i,n}(t), b_{n-i,n}(t), b_{i+1,n}(t), b_{n-i-1,n}(t)$ 。

容易验证, 现有的一些带形状参数的调配函数均为式(1)定义的拟 Bernstein 调配函数的特例。特别地, $\lambda = 0$ 时 $b_{i,n}(t) (i = 0, 1, \dots, n)$ 即为 n 次 Bernstein 基函数; $n = 2$ 时, 取 $\mu_0 = 0$, 则 $b_{i,2}(t) (i = 0, 1, 2)$ 即为文献[7]带一个形状参数的调配函数; $n = 3, \mu_0 = 0$ 时 $b_{i,3}(t) (i = 0, 1, 2, 3)$ 即为文献[8]带一个形状参数 λ 的基函数; $n = 4$ 时, 取 $\mu_0 = 0, \mu_1 = 3/10$ 或 $\mu_0 = 0, \mu_1 = 1/2$, 则 $b_{i,4}(t) (i = 0, 1, 2, 3, 4)$ 即为文献[9]带形状参数 λ 的第 1 类和第 2 类基函数; $n = 4$ 时, 若取 $\mu_0 = 0, \mu_1 = (2\mu + \nu + 3)/10$, 则 $b_{i,4}(t) (i = 0, 1, 2, 3, 4)$ 即为文献[10]带形状参数 λ, μ, ν 的 5 次多项式基函数; 对于任意正整数 n , 取 $\mu_i = (i+1)(1-\mu_{i-1})/(n+1-i), \mu_0 = 0$, 则 $b_{i,n}(t) (i = 0, 1, \dots, n)$ 即为文献[11]给出带形状参数 λ 的 $n+1$ 次调配函数。

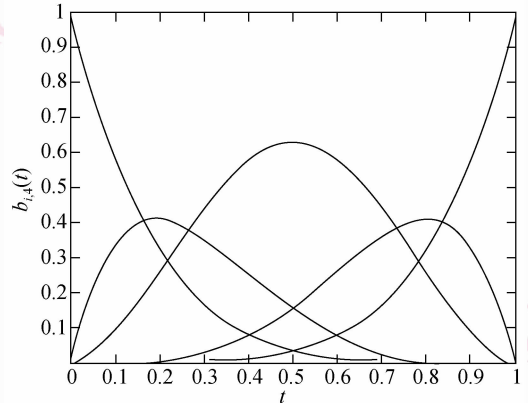
例 1 $n = 4$ 时, 带形状参数 λ, μ_0, μ_1 的 5 次拟 Bernstein 调配函数为

$$\begin{cases} b_{0,4}(t) = [1 - \lambda(1 - 5\mu_0)t](1-t)^4 \\ b_{1,4}(t) = [4 + \lambda(1 - 5\mu_0) + 5\lambda(\mu_0 + 2\mu_1 - 1)t]t(1-t)^3 \\ b_{2,4}(t) = (6 + 4\lambda - 10\lambda\mu_1)t^2(1-t)^2 \\ b_{3,4}(t) = [4 - 4\lambda + 10\lambda\mu_1 - 5\lambda(\mu_0 + 2\mu_1 - 1)t]t^3(1-t) \\ b_{4,4}(t) = [1 - \lambda(1 - 5\mu_0)(1-t)]t^4 \end{cases} \quad (5)$$

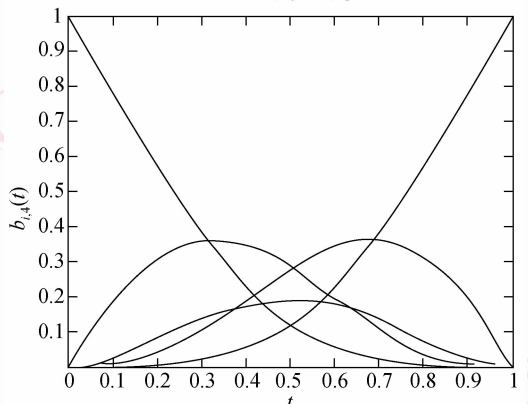
图 1(a) ~ 图 1(c) 分别取 $\lambda = 0$ (即 4 次 Bernstein 基函数), $\lambda = 1, \mu_0 = 0, \mu_1 = 0$ 及 $\lambda = 0.5, \mu_0 = 1, \mu_1 = 1$ 时的 5 次拟 Bernstein 调配函数图形。



(a) 4次Bernstein基函数



(b) $\lambda=1, \mu_0=0, \mu_1=0$



(c) $\lambda=0.5, \mu_0=1, \mu_1=1$

图 1 5 次拟 Bernstein 调配函数

Fig. 1 The quintic quasi Bèzier blending function

3 拟 Bézier 曲线及性质

定义 2 给定 $n + 1$ 个控制顶点 $P_i \in \mathbf{R}^d (d = 2, 3; i = 0, 1, \dots, n)$, 对 $t \in [0, 1]$, 称曲线

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(t) &= \mathbf{b}(\lambda, \mu_0, \dots, \mu_{[n/2]-1}; t) \\ &= \sum_{i=0}^n P_i b_{i,n}(\lambda, \mu_{i-1}, \mu_i; t) \end{aligned} \quad (6)$$

为 $n + 1$ 次拟 Bézier 曲线。其中 $b_{i,n}(\lambda, \mu_{i-1}, \mu_i; t)$ 为定义 1 中的拟 Bernstein 调配函数。

显然, $\lambda = 0$ 时 $\mathbf{b}(t)$ 退化为 n 次 Bézier 曲线。由于拟 Bernstein 调配函数具备许多优良性质, 故拟 Bézier 曲线也具有类似于 Bézier 曲线的一些特征。

性质 1 对称性, $\mathbf{b}(\lambda, \mu_0, \dots, \mu_{[n/2]-1}; t) = \mathbf{b}(\lambda, \mu_0, \dots, \mu_{[n/2]-1}; 1 - t)$, 即以 $P_0 P_1, \dots, P_n$ 为控制多边形的 $n + 1$ 次拟 Bézier 曲线和以 $P_n P_{n-1}, \dots, P_0$ 为控制多边形的 $n + 1$ 次拟 Bézier 曲线相同, 只是定向相反。

性质 2 凸包性, 由拟 Bernstein 调配函数的非负性及规范性可知, 式 (6) 定义的曲线位于 $\{P_i\}_{i=0}^n$ 生成的凸包中。

性质 3 端点性质, 由式 (4) 容易验证

$$\mathbf{b}(0) = P_0, \mathbf{b}(1) = P_n$$

$$\mathbf{b}'(0) = n + \lambda - (n + 1)\lambda\mu_0(P_1 - P_0)$$

$$\mathbf{b}'(1) = n + \lambda - (n + 1)\lambda\mu_0(P_n - P_{n-1})$$

即式 (6) 定义的拟 Bézier 曲线插值首末端点且与首末控制边相切。

性质 4 形状可调性, 利用拟 Bernstein 调配函数关于形状参数的单调性, 可以灵活调控拟 Bézier 曲线对控制多边形的逼近程度。在曲线曲面设计中, 尽管形状参数的修改增加了造型的灵活性, 但过多的选择往往使设计者难以把握, 也增加了造型的复杂性。因此, 在实际应用中, 可以先固定一些参数 (如 μ_i) 的取值, 使得其他参数 (如 λ) 的几何意义更加明确。尽管损失了部分调控能力, 但增加了形状调控的简洁性和实用性。

例如式 (5) 中取 $\mu_0 = 0.4, \mu_1 = 0.2$ 时, 由拟 Bernstein 调配函数对形状参数的单调性质可知, $b_{0,4}(t), b_{2,4}(t), b_{4,4}(t)$ 关于 λ 单调增加, $b_{1,4}(t), b_{3,4}(t)$ 关于 λ 单调减少。因此, 参数 λ 在 $[0, 1]$ 上由小变大时, 对应的 5 次拟 Bézier 曲线中控制点 P_0, P_2, P_4 的权重增加, P_1, P_3 的权重减少, 故曲线被

拉向 P_2 , 远离 P_1, P_3 。如图 2 所示, 参数 λ 由 0 变化到 1 时, 曲线 (从下到上) 由“矮胖”变为“高瘦”。同理, 可以固定参数 λ, μ_1 , 通过修改 μ_0 的取值调控曲线的形状。

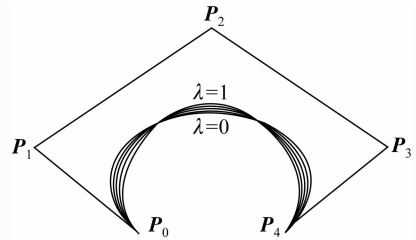


图 2 形状参数 λ 对拟 Bézier 曲线的调控
Fig. 2 Control of quasi Bézier curves with shape parameter λ

类似地, 可以讨论拟 Bézier 曲线的几何不变性、仿射不变性及保凸性等。由于含有可调的形状参数, 拟 Bézier 曲线在形状调控方面比 Bézier 曲线更加方便, 显示了更大的灵活性: 对于一组给定的控制顶点, 只能唯一确定一条 Bézier 曲线, 而用本文方法, 通过改变形状参数的取值可以生成不同位置的拟 Bézier 曲线, 以满足不同的设计需要。正如图 2 所示, $\lambda = 0$ 时即为 Bézier 曲线, 对于给定的控制点, 该曲线是唯一确定的; 而此时通过调整形状参数的取值, 可以得到更加丰富的造型效果。

运用张量积方法可以将拟 Bézier 曲线方法推广到曲面上。

定义 3 给定 $(n + 1) \times (n + 1)$ 个控制顶点 $P_{ij} (i, j = 0, 1, \dots, n)$, 称曲面

$$\mathbf{b}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n P_{ij} b_{i,n}(\lambda, \alpha_{i-1}, \alpha_i; u) b_{j,n}(\lambda, \beta_{j-1}, \beta_j; v) \quad (7)$$

为 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上的双 $n + 1$ 次拟 Bézier 曲面, 式中 $\lambda, \alpha_i, \beta_j (i, j = 0, 1, \dots, [n/2] - 1)$ 为形状参数, 且满足 $\lambda, \alpha_i, \beta_j \in [0, 1]$ 。

可以证明张量积拟 Bézier 曲面具有许多与张量积 Bézier 曲面类似的性质。

设 P 是 ΔABC 上的任意一点, u, v, w 为其重心坐标, 即 $P = uA + vB + wC$, 其中 $u, v, w \geq 0$, 且 $u + v + w = 1$ 。运用本文方法可以构造三角域上的拟 Bézier 曲面, 简便起见, 仅介绍三角域上含参数 λ 的 3 次调配函数及拟 Bézier 曲面如下。

定义 4 对上述 u, v, w , 称

$$\begin{cases} \hat{B}_{200}^2(u, v, w) = u^2[u + \lambda(v + w)] \\ \hat{B}_{020}^2(u, v, w) = v^2[v + \lambda(u + w)] \\ \hat{B}_{002}^2(u, v, w) = w^2[w + \lambda(u + v)] \\ \hat{B}_{110}^2(u, v, w) = uv[3 - \lambda + (\lambda - 1)w] \\ \hat{B}_{101}^2(u, v, w) = uv[3 - \lambda + (\lambda - 1)v] \\ \hat{B}_{011}^2(u, v, w) = vw[3 - \lambda + (\lambda - 1)u] \end{cases} \quad (0 \leq \lambda \leq 3)$$

为三角域上含参数 λ 的 3 次拟 Bernstein 调配函数。若 $P_{ijk}(i, j, k \geq 0, i + j + k = 2)$ 为 \mathbf{R}^3 中的控制网格点, 称

$$r(u, v, w) = \sum_{i+j+k=2} P_{ijk} \hat{B}_{ijk}^2(u, v, w)$$

为三角域上含参数 λ 的 3 次拟 Bézier 曲面。

容易验证, 三角域上含参数 λ 的 3 次拟 Bernstein 调配函数具有类似于三角域上 2 次 Bernstein 基函数的性质, 三角域上含参数 λ 的 3 次拟 Bézier 曲面也具有类似于三角域上 2 次 Bézier 曲面的性质, 但前者在形状控制中显示了更大的灵活性, 对于给定的控制网格, 通过修改 λ 的取值可以生成不同位置的拟 Bézier 曲面, 如图 3 所示。

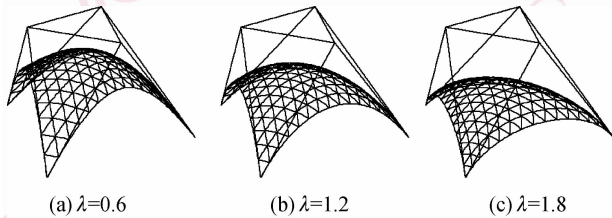


图 3 三角域上的 3 次拟 Bézier 曲面

Fig. 3 The quasi Bézier surface on triangular domain

4 曲线的拼接

定义 5 给定 $mn + 1$ 个控制顶点 $P_i \in \mathbf{R}^d (d = 2, 3; i = 0, 1, \dots, mn)$, $m + 1$ 个节点 $u_0 < u_1 < \dots < u_m$, 实数 $\lambda_i, \mu_{0,i}, \dots, \mu_{[n/2]-1,i} \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, m$, 定义多项式曲线段

$$\begin{aligned} c_i(t) &= c_i(\lambda_i, \mu_{0,i}, \dots, \mu_{[n/2]-1,i}; t) \\ &= \sum_{j=0}^n P_{n(i-1)+j} b_{j,n}(t), u \in [u_{i-1}, u_i] \end{aligned}$$

式中, $t = (u - u_{i-1}) / (u_i - u_{i-1}), b_{j,n}(t) = b_{j,n}(\lambda_i, \mu_{j-1,i}, \mu_{j,i}; t)$ 为定义 1 中的拟 Bernstein 调配函数。定义 $[u_0, u_m]$ 上的组合多项式曲线

$$c(u) = c_i((u - u_{i-1}) / (u_i - u_{i-1})) \quad (8)$$

不失一般性, 对 $i = 1, 2, \dots, m - 1$, 只考虑相邻两个曲线段 $c_i(t)$ 和 $c_{i+1}(t)$ 在公共点 P_{ni} 处的拼接条件。由定义 4 可知

$$\begin{aligned} c_i(t) &= \sum_{j=0}^n P_{n(i-1)+j} b_{j,n}(t) \quad u \in [u_{i-1}, u_i] \\ c_{i+1}(t) &= \sum_{j=0}^n P_{ni+j} b_{j,n}(t) \quad u \in [u_i, u_{i+1}] \end{aligned}$$

定理 1 当 $P_{ni-1}, P_{ni}, P_{ni+1}$ 共线时, 曲线 (8) 在拼接点 P_{ni} 处满足 G^1 连续, 且适当选取形状参数的取值, 可使曲线 (8) 在 P_{ni} 处满足 C^1 连续。

证明 由拟 Bézier 曲线的端点性质 3 知

$$c(u_i^-) = c_i(1) = P_{ni} = c_{i+1}(0) = c(u_i^+)$$

且

$$\begin{aligned} c'(u_i^-) &= c'_i(1) \\ &= \frac{n + \lambda_i - (n + 1)\lambda_i \mu_{0,i} (P_{ni} - P_{ni-1})}{u_i - u_{i-1}} \\ c'(u_i^+) &= c'_{i+1}(0) \\ &= \frac{n + \lambda_{i+1} - (n + 1)\lambda_{i+1} \mu_{0,i+1} (P_{ni+1} - P_{ni})}{u_{i+1} - u_i} \end{aligned}$$

故当 $P_{ni-1}, P_{ni}, P_{ni+1}$ 共线时, 曲线 (8) 在 P_{ni} 处 G^1 连续, 并且适当选取形状参数 $\lambda_i, \lambda_{i+1}, \mu_{0,i}, \mu_{0,i+1}$ 的取值, 可使 $c'(u_i^-) = c'(u_i^+)$, 即曲线 (8) 在 P_{ni} 处满足 C^1 连续, 证毕。

由等式 $c'(u_i^-) = c'(u_i^+)$ 成立的条件可知, 参数 $\lambda_i, \lambda_{i+1}, \mu_{0,i}, \mu_{0,i+1}$ 满足某等式时, 曲线 (8) 在 P_{ni} 处满足 C^1 连续。而此时有 4 个待定的参数, 提供了额外的自由度, 因此可以通过修改参数的取值调控曲线的形状, 同时曲线满足 C^1 连续。关于组合拟 Bézier 曲线的更高阶拼接条件, 也可类似讨论。

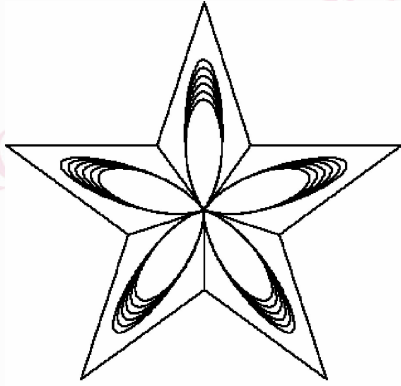
5 应用实例

本节将以 5 次拟 Bézier 曲线为例, 研究平面五角星花瓣图案和花瓶旋转曲面的造型设计。实例表明, 本文方法构造的拟 Bézier 曲线具有一定的应用价值, 是现有曲线曲面造型方法的一个有益补充。

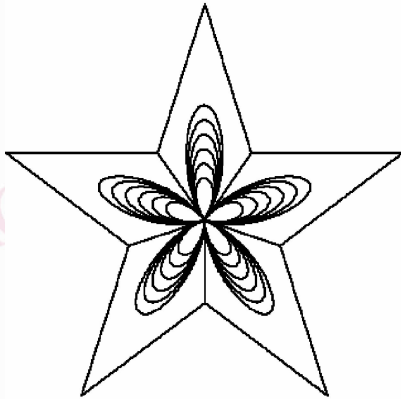
5.1 五角星花瓣图案

当首末端点重合时, 拟 Bézier 曲线是一条封闭曲线。利用 5 次拟 Bézier 曲线的形状可调性, 图 4 给出了五角星花瓣图案的造型实例。考虑到图案的对称性, 每段曲线的形状参数取值相同。图 4(a) 中

参数取 $\mu_0 = \mu_1 = 0$, 图 4(b) 中参数取 $\mu_0 = \mu_1 = 1$, 形状参数 λ 取值均为 $\lambda = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ 。由图 4 可以看出, 当 μ_0, μ_1 固定时, 随着参数 λ 的增加, 图 4(a) 中的曲线逐渐向控制多边形靠近, 图 4(b) 中的曲线逐渐远离控制多边形。



(a) $\mu_0 = \mu_1 = 0$



(b) $\mu_0 = \mu_1 = 1$

图 4 五角星花瓣图案

Fig. 4 The pentacle leaf pattern

5.2 花瓶造型

在曲面造型中, 可以利用拟 Bézier 曲线的拼接技术生成旋转曲面。图 5 给出了一个花瓶旋转曲面造型实例, 其中母线由 3 段 5 次拟 Bézier 曲线拼接构成, 每段曲线的形状参数相同。给定控制多边形的顶点依次取为 $P_0(2.8, 8), P_1(2, 8), P_2(1.3, 7.5), P_3(2, 7), P_4(2.3, 6.75), P_5(5, 4.5), P_6(6, 4.5), P_7(5, 4), P_8(2.3, 0.625), P_9(2.2, 0.5), P_{10}(2.1, 0.4), P_{11}(2, 0.3), P_{12}(2, 0)$ 。由于 P_3, P_4, P_5 3 点共线, P_7, P_8, P_9 3 点共线, 根据拟 Bézier 曲线的端点性质, 该母线在拼接点处 G^1 连续。图 5(a) 中参数取 $\lambda = 0, \mu_0, \mu_1 \in [0, 1]$, 即母线由 3 段 4 次 Bézier

曲线构成; 图 5(b) 中参数取 $\lambda = 0.5, \mu_0 = \mu_1 = 1$; 图 5(c) 中参数取 $\lambda = \mu_0 = \mu_1 = 1$ 。



(a) $\lambda = 0, \mu_0, \mu_1 \in [0, 1]$



(b) $\lambda = 0.5, \mu_0 = \mu_1 = 1$



(c) $\lambda = \mu_0 = \mu_1 = 1$

图 5 花瓶旋转曲面的彩绘模型

Fig. 5 The vases painted models

图 5 给出的花瓶造型实例表明, 对于给定的控制多边形, 通过修改形状参数的取值, 可以整体或局部调控旋转曲面的外形, 从而达到预期的设计效果。

6 结 论

本文首先利用 n 次及 $n + 1$ 次 Bernstein 基的凸组合, 构造了一组新的带形状参数的 $n + 1$ 次多项式调配函数, 由于具有类似 Bernstein 基的性质, 故称之为拟 Bernstein 调配函数。然后利用该调配函数生成的曲线称为拟 Bézier 曲线, 该曲线具有对称性、凸包性及与 Bézier 曲线类似的端点性质等。最后利用张量积技术将该方法推广到空间曲面。利用本文方法构造的曲线曲面均以 Bézier 曲线曲面为特例, 由于含有可调的形状参数, 在曲线曲面造型技术中, 通过修改形状参数的取值, 可以更加灵活、方便地调

控曲线曲面的形状。

最后指出,在本文方法得到的含形状参数的低次拟 Bernstein 调配函数基础上,利用与 Bernstein 基类似的递推方法^[10]:

$$\begin{cases} b_{i,m}(t) & i=0,1,\dots,m;m < n \\ b_{j,n}(t) = (1-t)b_{j,n-1}(t) + tb_{j-1,n-1}(t), \\ & j=0,1,\dots,n \\ b_{-1,n-1}(t) = b_{n,n-1}(t) = 0 \end{cases}$$

可以生成一种新的拟 Bernstein 调配函数,也能相应得到新的拟 Bézier 曲线曲面,且用递推方法得到的调配函数与本文定义的拟 Bernstein 调配函数不同(形状参数个数不同)。

参考文献 (References)

- Kim S H, Young J A. An approximation of circular arcs by quartic Bézier curves[J]. *Computer-aided Design*, 2007, **39**(6): 490-493.
- Mineur Y, Lichah T, Castelain J M, *et al.* Shape controlled fitting method for Bézier curves[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 1998, **15**(9): 879-891.
- Farin G. Class a Bézier curves[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2006, **23**(7): 573-581.
- Cao Juan, Wang Guo-zhao. A note on class a Bézier curves[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2008, **25**(7), 523-528.
- Han Xi-an, Ma Yi-chen, Huang Xi-li. A novel generalization of Bézier curve and surface[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2008, **217**(1): 180-193.
- Wang Wen-tao, Wang Guo-zhao. Bézier curves with shape parameter [J]. *Journal of Zhejiang University Science*, 2005, **6A**(6): 497-501.
- Han Xu-li, Liu Sheng-jun. Extension of a quadratic Bézier curve [J]. *Journal of Central South University*, 2003, **34**(2): 214-217. [韩旭里, 刘圣军. 二次的扩展[J]. *中南工业大学学报*, 2003, **34**(2): 214-217.]
- Wu Xiao-qin, Han Xu-li. Extension of cubic Bézier curve [J]. *Journal of Engineering Graphics*, 2005, (6): 98-102. [吴晓勤, 韩旭里. 三次 Bézier 曲线的扩展[J]. *工程图学学报*, 2005, (6): 98-102.]
- Wu Xiao-qin, Han Xu-li, Luo Shan-ming. Two different extensions of quartic Bézier curve [J]. *Journal of Engineering Graphics*, 2006, (5): 59-64. [吴晓勤, 韩旭里, 罗善明. 四次 Bézier 曲线的两种不同扩展[J]. *工程图学学报*, 2006, (5): 59-64.]
- Zhu Xiu-mei, Guo Qing-wei, Zhu Gong-qin. Extension of the quartic Bézier curve with parameters [J]. *Journal of Hefei University of Technology*, 2008, **31**(4): 671-674. [朱秀梅, 郭清伟, 朱功勤. 含多参数的四次 Bézier 曲线的扩展[J]. *合肥工业大学学报*, 2008, **31**(4): 671-674.]
- Cheng Huang-he, Zeng Xiao-ming. Bézier curves with shape paramete [J]. *Journal of Xiamen University*, 2006, **45**(3): 320-322. [程黄和, 曾晓明. 带形状参数的 Bézier 曲线[J]. *厦门大学学报*, 2006, **45**(3): 320-322.]
- Wu Xiao-qin. Bézier curve with shape paramete [J]. *Journal of Image and Graphics*, 2006, **11**(2): 269-274. [吴晓勤. 带形状参数的 Bézier 曲线[J]. *中国图象图形学报*, 2006, **11**(2): 269-274.]